27/11/2018

#8º ΜΑΘΗΜΑ#

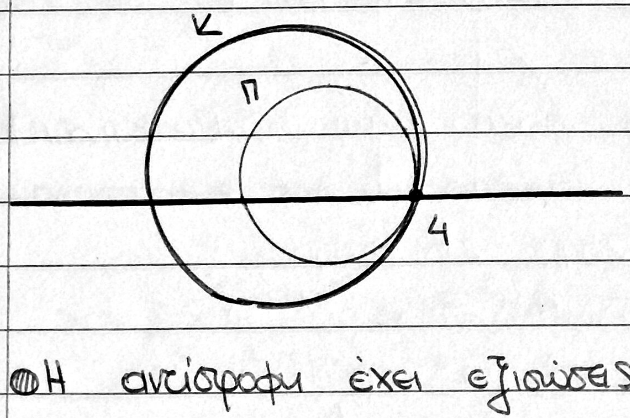
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν ταυτίσουμε το $\mathbb{R}^2$ με το $\mathbb{C}$ μέσω της απεικόνισης $(x,y) \rightarrow x+iy \Rightarrow$ Η αντιστροφή θα έχει εξίσωση

$$C_k(z) = z_0 + \frac{R^2}{\overline{z-z_0}}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Δίνεται ο κύκλος k με κέντρο την αρχή $O(0,0)$ και ακτίνα $R=4$

- $\Pi = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-1)^2+y^2=9\}$



- Η αντιστροφή έχει εξισώσεις

$$x' = \frac{16x}{x^2+y^2}, \quad y' = \frac{16y}{x^2+y^2}$$

$$\rightarrow x = \frac{16x'}{(x')^2+(y')^2}, \quad y = \frac{16y'}{(x')^2+(y')^2}$$

- Απο υπόθεση: $(x-1)^2+y^2=9$

- Με αντικατάσταση $\Rightarrow 9=(x-1)^2+y^2=\left\{\frac{16x'}{(x')^2+(y')^2}-1\right\}^2+\left\{\frac{16y'}{(x')^2+(y')^2}\right\}^2$

$$=\frac{16^2(x')^2}{[(x')^2+(y')^2]^2}+1-\frac{32x'}{(x')^2+(y')^2}+\frac{16^2(y')^2}{[(x')^2+(y')^2]^2}$$

$$\Rightarrow 9=\frac{16}{(x')^2+(y')^2}+1-\frac{32x'}{(x')^2+(y')^2}$$

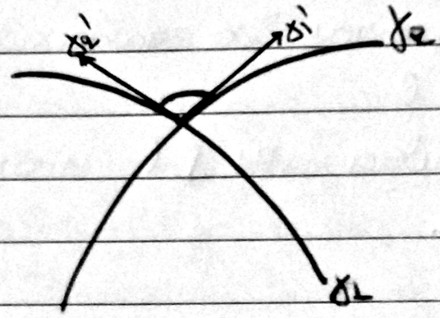
$$\Rightarrow (x')^2+(y')^2+4x'=32$$

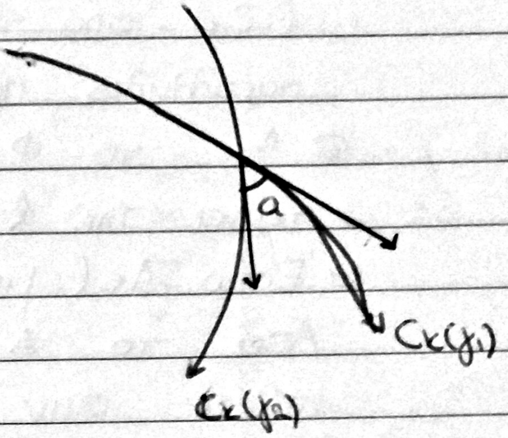
$$\Rightarrow (x'+2)^2+(y')^2=36$$

$$\Rightarrow (x'+2)^2+(y')^2=36$$

* Αντιστροφή: $\Pi'=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(x+2)^2+y^2=36\}$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Η αντιστροφή είναι σύμμορφη απεικόνιση (δηλαδή) η αντιστροφή διατηρεί τις γωνίες τεμνόμενων καμπυλών.





- Η αντιστροφή "1-1"

[ΑΠΟΔΕΙΞΗ]: Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτω ότι η αντιστροφή έχει ως αρχή την αρχή των αξόνων

Δηλ. $C(x,y) = R^2\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$

ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

- Υπερβολική είναι η γεωμετρία στην οποία ισχύουν όλα τα αξιώματα της Ευκλείδειας, εκτός από το αξίωμα της παραλληλίας το οποίο αντικαθίσταται με την άρνησή:

ΠΥ: Υπάρχει ευθεία ℓ και σημείο P εκτός αυτής από το οποίο διέρχονται δυο τουλάχιστον παράλληλες προς την ℓ.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1: Στην υπερβολική γεωμετρία για κάθε ευθεία ℓ και από κάθε σημείο P, εκτός αυτής διέρχονται δυο τουλάχιστον παράλληλες προς την ℓ.

[ΑΠΟΔΕΙΞΗ]: Έστω ℓ ευθεία και P: σημείο εκτός ℓ

Θ.δ.ο από το P διέρχονται δυο τουλάχιστον παράλληλες προς την ℓ.

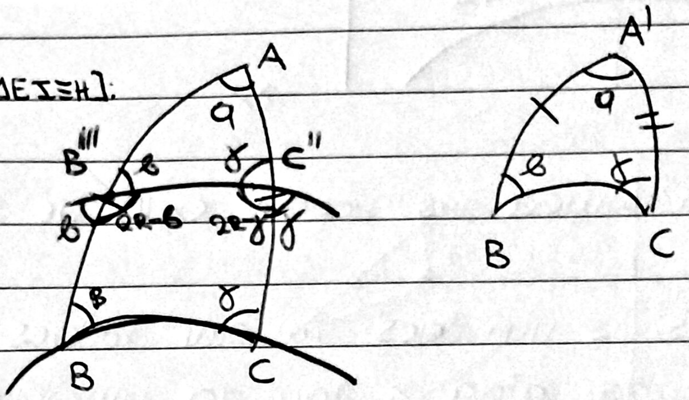
- Από το P: φέρνω ευθεία $m_1 \perp \ell$, η οποία τέμνει την ℓ στο Q.
- Έστω $A \in \ell$ με $A \neq Q$
  Από το A φέρνω ευθεία m_2, η οποία κάθετη στην ℓ.
- Τότε, απ' το σημείο P: φέρνουμε ευθεία κάθετη στην $m_2 \Rightarrow PB // \ell$
- Από το B: φέρνω κάθετη προς την PQ
- Η $BK // \ell$ και επιπλέον $BK \neq BP$, διότι διαφορετικά θα είχαμε τετράπλευρο με άθροισμα γωνιών

4 ορθές $\Rightarrow$ αξ. Ε.Γ

* Απο το Β διέρχονται 2 // προς την ℓ.

ΘΕΩΡΗΜΑ 9: Αν δυο τρίγωνα είναι όμοια $\Rightarrow$ Είναι ΙΣΑ.

[ΑΠΟΔΕΙΞΗ]:



- Υποθέτουμε, ότι ABC κ/ A'B'C' είναι όμοια α, β, γ και υποθέτω ότι: $AB > A'B'$
  $AC > A'C'$

$\Rightarrow$ Υπάρχουν, B'' και C'' : $AB'' = AB'$ και $AC'' = AC'$

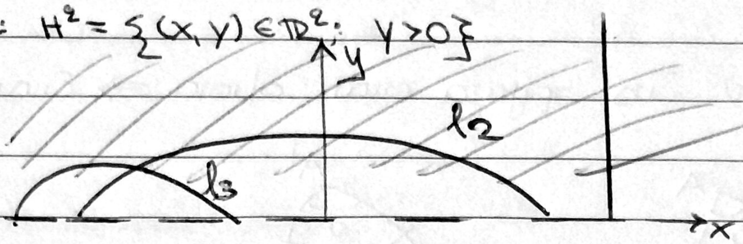
$\Rightarrow \overset{\Delta}{AB''C''} = \overset{\Delta}{A'B'C'}$

- Οι ευθείες $B''C''$ και BC : παράλληλες, αφού έχουν εντος εναλλάξ γωνίες ίσες.
- Στο τετράπλευρο $BB''C''C$ έχω άθροισμα γωνιών $w = \beta + (2\pi - \beta) + (2\pi - \gamma) + \gamma = 4\pi$

* Ισχύει, το αξίωμα της // $\Rightarrow$ άτοπο

ΜΟΝΤΕΛΟ POINCARE

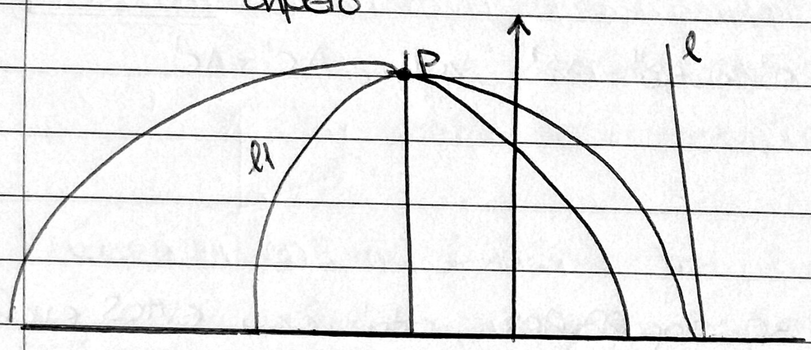
- Ονομάζουμε, υπερβολικό επίπεδο ή απλώς Υ-επίπεδο, το σύνολο: $H^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y>0\}$



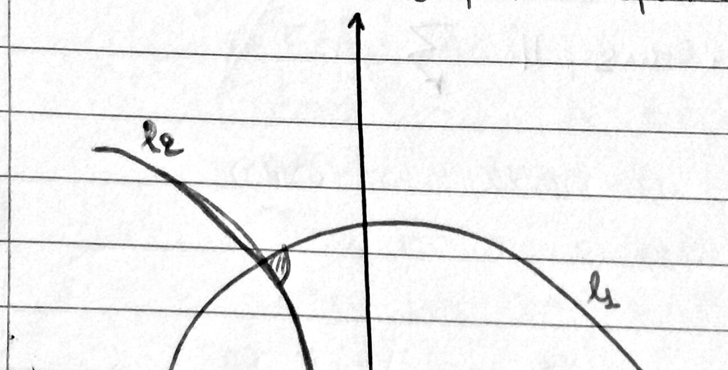
- Ονομάζω: Υ-σημεία: Σημεία της μορφής (x,y) με $y>0$

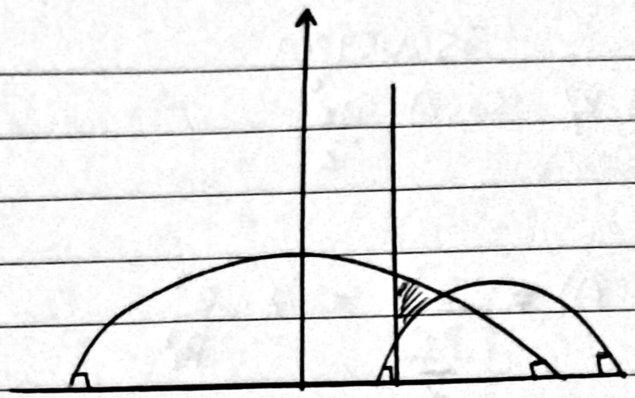
  Υ-ευθείες: Τις ημιευθείες που είναι κάθετες προς τον άξονα x και τα ημικύκλια των οποίων το κέντρο βρίσκεται στον x-άξονα.

ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ: Θα ονομάζονται Υ-ευθείες που δεν έχουν κανένα κοινό σημείο

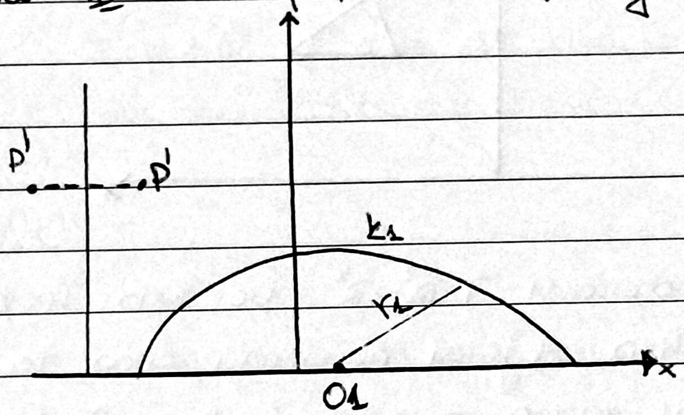


ΓΩΝΙΑ: Δυο τεμνόμενων Υ-ευθειών θα ονομάζουμε τη γωνία των εφ/νων στο σημείο τομής.





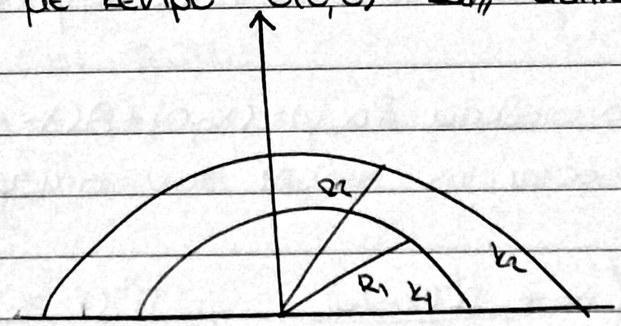
● Y-ΙΣΟΜΕΤΡΙΑ: Ονομάζεται, κάθε απεικόνιση $f: H^2 \to H^2$, η οποία είναι σύνθεση $c_1 \circ c_2 \circ \dots \circ c_k$, όπου κάθε μια από τις $c_1, \dots, c_k$ είναι αντιστροφή περιορισμένη στο H^2 ως προς κύκλο με κέντρο στον x-άξονα ή κατοπτρισμός ως προς άξονα κάθετο στον x-άξονα



■ ΟΡΙΣΜΟΣ: Δυο σχήματα Σ_1, Σ_2 θα λέγονται ίσα αν υπάρχει Y-ΙΣΟΜΕΤΡΙΑ $f: H^2 \to H^2$ τέτοια ώστε: $f(\Sigma_1) = \Sigma_2$

■ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ας θεωρήσουμε, δυο κύκλους k_1, με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα R_1, και k_2 με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα R_2

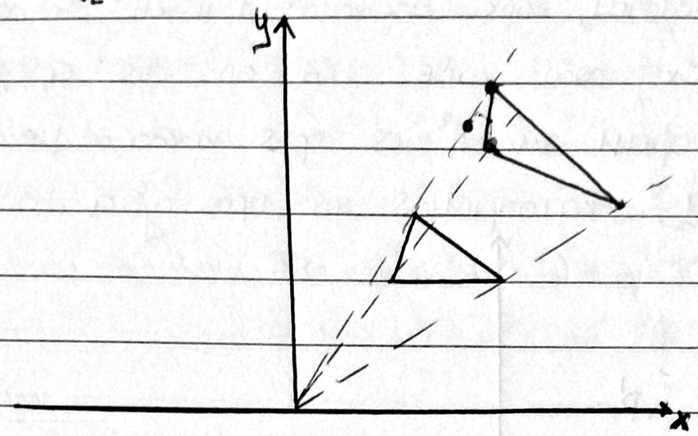


ΙΣΟΜΕΤΡΙΑ ΙΣΟΜΕΤΡΙΑ

Τότε, $C_1(z) = \frac{R_1^2}{\bar{z}}$ κ/ $C_2(z) = \frac{R_2^2}{\bar{z}}$

● $C_1 \circ C_2(z) = C_1(C_2(z)) \Rightarrow \frac{R_1^2}{\overline{\frac{R_2^2}{\bar{z}}}} = z \cdot \frac{R_1^2}{R_2^2}$

$\rightsquigarrow f(x,y) = \frac{R_1^2}{R_2^2}(x,y)$



ΟΡΙΣΜΟΣ: Μια απεικόνιση $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με τύπο: $T(x,y) = (x_0, y_0) + \lambda(x-x_0, y-y_0)$ με $\lambda \neq 0$ λέγεται ομοιοθεσία, όπου το σημείο (x_0, y_0) λέγεται κέντρο ομοιοθεσίας και λ: συντ/στής.

ΘΕΩΡΗΜΑ: (1) Η παράλληλη μεταφορά ως προς τον άξονα κατά απόσταση c, $f(x,y) = (x+c, y)$, είναι ισομετρία

(2) Κάθε ομοιοθεσία : ισομετρία

[ΑΠΟΔΕΙΞΗ]: ● f: γράφεται ως σύνθεση $f_1(x,y) = (c/2 - x, y)$

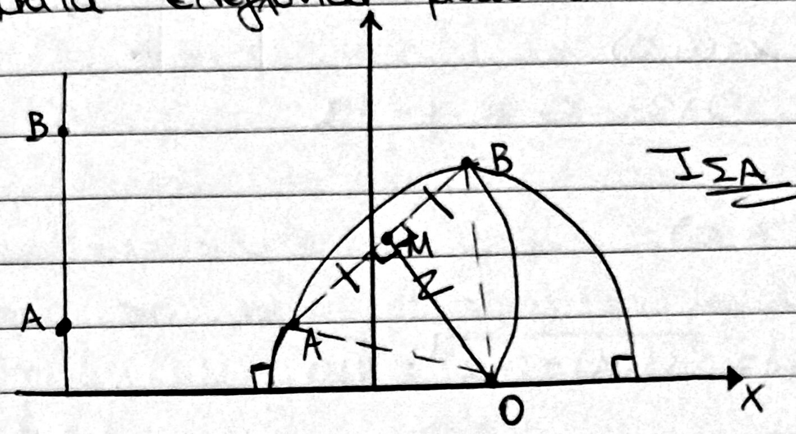
$f_2(x,y) = (-c/2 - x, y)$

(2) ● Η ομοιοθεσία $f(x,y) = (x_0, 0) + \lambda(x - x_0, y)$ γράφεται ως σύνθεση των αντιστροφών

● $C_1 = \left(x_0 + \frac{r_1^2(x-x_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}, \frac{r_1^2(y-y_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \right)$

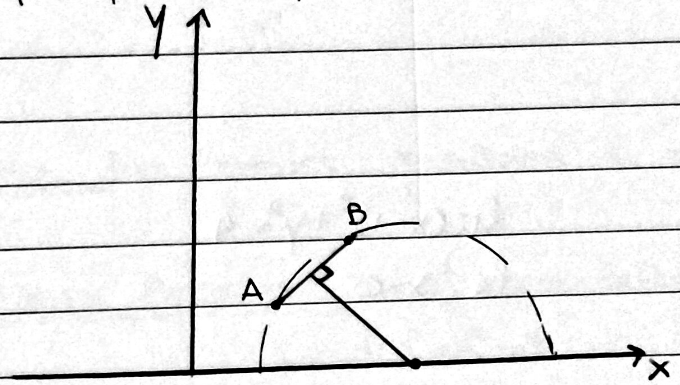
$$C_2 = \left(x_0 + \frac{r_2^2 (x-x_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} , \frac{r_2^2 (y-y_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \right) \quad \text{με} \quad \lambda = \frac{r^2}{r_2^2}$$

→ Τα αξιώματα ελέγχονται μέσω αναλυτικής γεωμετρίας



Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε τα σημεία A(1,1) και B(3,3)



- Ας υπολογίσω την y-ευθεία που διέρχεται από το A, B
- Βρίσκω, το μέσο M του τμήματος AB
- Βρίσκω, τη μεσοκάθετο ℓ από το M προς το AB
- Βρίσκω, την τομή K την ℓ με τον x-άξονα

  Άρα, K: το κέντρο του κύκλου
- Η ακτίνα είναι $R = |AK|$

- $M = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{1+3}{2}\right) = (2,2)$.

- $\vec{AB} = (2,2)$

  $\vec{n} = (\alpha, \beta) = (-2, 2)$

$\bullet$ $\ell(t) = (2,2) + t(-2,2)$
$= (2-2t, 2+2t)$, $t \in \mathbb{R}$

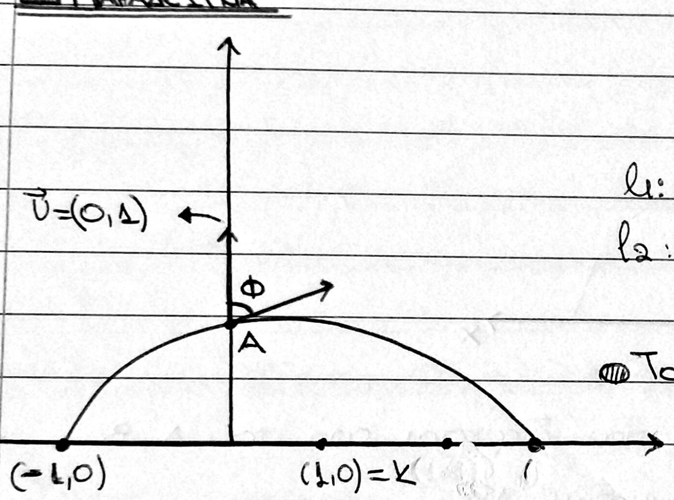
$\bullet$ Η τομή της ℓ με τον άξονα x
είναι: $K(4,0)$
Αφού, $2+2t=0 \Leftrightarrow t=-1$

$*$ $K(4,0)$.

$\bullet$ $R = |AK| = \sqrt{(1,1)-(4,0)} = \sqrt{10}$

$*$ Η γ-ευθεία που ενώνει τα A, B: $(x-4)^2 + y^2 = 10$

Παράδειγμα



$\ell_1: (x-1)^2 + y^2 = 4$
$\ell_2: x=0$

$\bullet$ Το σημείο τομής: $A(0, \sqrt{3})$.

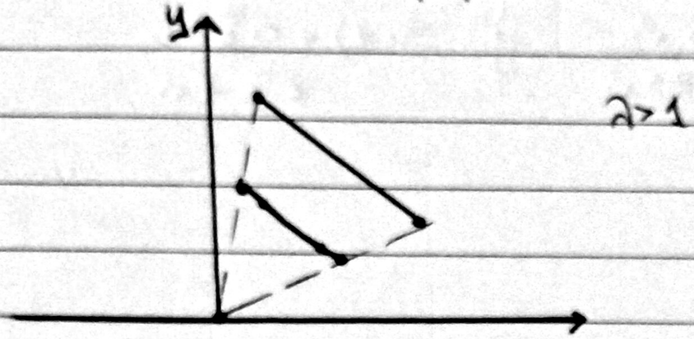
$\bullet$ Βρίσκω, το δ/μα

2 → ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ← Σ

(α) Συνθέσεις της μορφής $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_k$, όπου σ_k αντιστροφές περιορισμένες στο H^2

(β) Κατοπτρισμοί ως προς άξονα // προς τον y

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν συνδυάσαμε τα (α), (β) ⇒ και οι ομοιοθεσίες $\theta(x,y) = (x_0, y_0) + \lambda(x - x_0, y - y_0)$, αλλά και οι // μεταφορές της μορφής $T(x,y) = (x+c, y)$: ΙΣΟΜΕΤΡΙΕΣ



ΘΕΩΡΗΜΑ: Δυο τυχαίες Υ-ευθείες l_1 και l_2 είναι ίσες.

ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗ ΑΠΟΣΤΑΣΗ: Ονομάζω υπερβολική απόσταση μία συνάρτηση $d: H^2 \times H^2 \to \mathbb{R}$, με τις εξής ιδιότητες:

- Η d αναλλοίωτη ως προς τις υπερβολικές ισομετρίες $[d(f(p), f(q)) = d(p,q)]$, $\forall\, p, q \in H^2$
- Εάν, $(0, y_1)$, $(0, y_2)$ και $(0, y_3)$ σημεία του y άξονα, με $y_1 < y_2 < y_3$ $[d((0,y_1),(0,y_2)) + d((0,y_2)+(0,y_3)) = d(0,y_3)][0,y_1]]$
- d: ΣΥΝΕΧΗΣ!

$$* \quad d(z,w) = \log \frac{|z-\bar{w}| + |z-w|}{|z-\bar{w}| - |z-w|}$$

Θεώρημα: Κάθε, Υ-ισομετρία είναι της μορφής:
$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$ με $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ με

$ad-bc>0$ ή $$f(z)=\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$$

με $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ και $ad-bc<0$

Θεώρημα: Έστω, $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ απεικόνιση που μετασχηματίζει κύκλους σε γενικευμένους κύκλους

$$\Rightarrow f(z)=\frac{az+b}{cz+d} \quad \text{ή} \quad f(z)=\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}.$$